ALGORITMOS Y ESTRUCTURAS DE DATOS III - 2º Recuperatorio

Fecha examen: 20-JUL-2018 / Fecha notas: a determinar

	Nº Orden	Apellido y nombre	L.U.	Cant. hojas[1]
Completar:			–	8 +1=9
	Nota (Nº)	Nota (Letras)	Docente	
No completar:	6,25	seis con veinticinco/100	Alejandro	

1. (a) Sea G un grafo con ejes, e un eje de G, y H_e el grafo que se obtiene al subdividir e en G. Demostrar que las secuencias gráficas de G y H_e ordenadas de manera no creciente son iguales excepto por el hecho de que la segunda tiene un elemento agregado de valor 2. Concluir que la aplicación de sucesivas subdivisiones preserva la secuencia gráfica original, excepto por el hecho de que aparecen elementos agregados de valor 2.

   (b) Sea G un grafo que tiene a lo sumo 4 nodos de grado mayor o igual a 3. Usar el punto anterior para demostrar que G es planar.

2. Sea G un grafo planar de n vértices. Demostrar que $\alpha(G) \geq \lceil n/4 \rceil$.

3. Se tienen m materiales cuyas propiedades es necesario analizar. Para llevar a cabo esta tarea, se han seleccionado b laboratorios especializados en este tipo de pruebas. Cada material se identifica por un entero distinto entre 1 y m. Cada laboratorio se identifica por un entero distinto entre 1 y b, y está capacitado para analizar sólo algunos de los materiales existentes. A fin de limitar el efecto que pudiera tener algún laboratorio incompetente, está previsto que un mismo material sea analizado por hasta 5 laboratorios distintos, y que cada laboratorio analice hasta 10 materiales distintos.

   Diseñar un algoritmo eficiente basado en grafos que determine la máxima cantidad total de informes sobre los materiales que es posible obtener por parte de los laboratorios. La entrada del algoritmo es la cantidad m de materiales, la cantidad b de laboratorios, y para cada laboratorio la lista de materiales que el laboratorio es capaz de analizar. Mostrar que el algoritmo propuesto es correcto y determinar su complejidad. Justificar.

4. Demostrar mediante una reducción polinomial que $\Pi_1 \in P \Rightarrow \Pi_2 \in P$.

   Π_1: ÁRBOL GENERADOR DE GRADO ACOTADO
   Entrada: grafo H; $k \in \mathbb{N}_0$.
   Pregunta: ¿tiene H un árbol generador en el cual todos los vértices tienen grado a lo sumo k?

   Π_2: CAMINO HAMILTONIANO
   Entrada: grafo G.
   Pregunta: ¿existe un camino que pasa exactamente una vez por cada vértice de G?

5. Dado un grafo G, se definen

   - $\omega(G)$ = cantidad de vértices de un subgrafo completo máximo de G;
   - $\alpha(G)$ = cantidad de vértices de un conjunto independiente máximo de G;
   - $\tau(G)$ = cantidad de vértices de un cubrimiento de aristas por vértices mínimo de G;
   - $\nu(G)$ = cantidad de aristas de una correspondencia máxima de G; y
   - $\rho(G)$ = cantidad de aristas de un cubrimiento de vértices por aristas mínimo.

   Sean G y H dos grafos, y sea $G + H$ su grafo junta.

   (a) Demostrar que $\omega(G + H) = \omega(G) + \omega(H)$.

   (b) Demostrar que $\alpha(G + H) = \max\{\alpha(G), \alpha(H)\}$.

   (c) Expresar $\tau(G + H)$ en función de $\tau(G)$ y $\tau(H)$. Justificar.

   (d) ¿Es cierto que $\nu(G + H) = \nu(G) + \nu(H)$, o que $\nu(G + H) = \max\{\nu(G), \nu(H)\}$? En caso afirmativo demostrar; en caso negativo dar un contraejemplo y justificar.

   (e) ¿Es cierto que $\rho(G + H) = \rho(G) + \rho(H)$, o que $\rho(G + H) = \max\{\rho(G), \rho(H)\}$? En caso afirmativo demostrar; en caso negativo dar un contraejemplo y justificar.

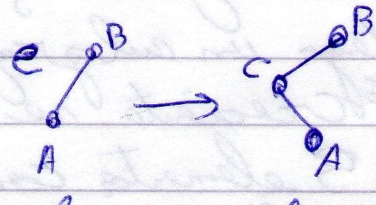
1 ORD

HOJA N°

CHA

1) a) Una secuencia gráfica son los grados de los vértices de un grafo

Sea G al que se le subdivide una arista e



En el resto del grafo los demás nodos mantienen el grado, con lo cual los únicos que se verían afectados son A, B y C que es el nuevo nodo que aparece.
Tanto a A como a B se les quita la arista que los une, pero se les agrega una nueva arista que los une a C con lo cual el grado de ambos se mantiene igual en G_{He} que en G

$$d(A_{He}) = d(A_G) - 1 + 1 = d(A_G)$$

lo mismo con $d(B_{He})$

y como C es el resultado de subdividir una arista solo tendrá 2 nodos vecinos (aquellos a los que incidía la arista subdividida. Con lo cual solo se agregará un elemento de valor 2 a la secuencia gráfica ordenada de G. Esto puede seguirse aplicando, y en cada paso sucederá lo mismo, con lo cual los grados de los vértices originales se mantendrán y aquellos que fueron surgiendo de subdividir aristas tendrán grado 2.

b) G planar $\Longleftrightarrow$ no contiene ningún ~~sub~~grafo homeomorfo a $K_{3,3}$ ni a K_5

~~Si tiene~~ K_5 tiene a todos sus nodos con grado 4

Para que G tenga un subgrafo homeomorfo a K_5, subdividiendo aristas tantas tengo que llegar a que G contenga un subgrafo isomorfo a K_5. Esto en una secuencia gráfica de G creciente se vería reflejado en que habría al menos 5 elementos con grado mayor o igual a 4 (*) (que serían de los 5 nodos que forman el subgrafo isomorfo a K_5). Pero como a lo sumo hay 4 nodos con grado mayor o igual a 3 en G, y por el punto a) no aparecerán nuevos nodos con grado distinto a 2 ni se modificarán los grados de los nodos originales, G NO tiene ~~un~~ ~~subgrafo~~ contenido un grafo homeomorfo a K_5

Confuso

(*) Porque subdividiendo aristas de K_5 por el punto a generaría una secuencia gráfica así: $\underbrace{222\ldots2}_{\text{hay tantos 2 como subdivisiones se hicieron}}4444$ (creciente)

El mismo argumento vale para $K_{3,3}$ ya que tiene 6 nodos con grado 3, aplicando subdivisiones en $K_{3,3}$ y G nunca se conseguirá llegar a que hay un subgrafo isomorfo a $K_{3,3}$ porque en G hay a lo sumo 4 nodos con grado 3, $K_{3,3}$ tiene 6 y como subdividir no hace más que agregar nodos de grado 2 y mantener el de los anteriores, en los posteriores grafos obtenidos de subdividir G nunca llegará a tener 6 nodos de grado 3

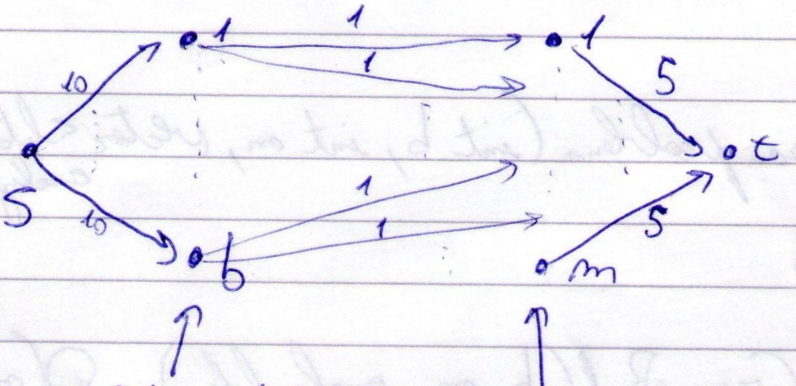
(2)

HOJA N°

FECHA

3) Resolveré este problema con flujo

Para eso crearé la siguiente red



Estos nodos representan a los laboratorios

Estos representan a los materiales

Existe una arista dirigida de un nodo laboratorio a uno material si ~~eso~~ dicho laboratorio está capacitado para analizar ese material. C/u de estas aristas tienen capacidad 1 (en la cual la función de flujo valdrá 1 si ese laboratorio efectivamente analiza ese material). Desde el nodo "s" hay una arista dirigida hacia cada nodo laboratorio con capacidad 10 lo cual representa el hecho de que un laboratorio no puede analizar más de 10 materiales (lo cual ~~[illegible]~~ sucederá así por la ley de conservación de flujo) la representación.

Al nodo "t" llegan una arista por cada material, c/u de ellas con capacidad 5, con lo cual me aseguro que esos materiales no hayan sido analizados por más de 5 laboratorios (nuevamente por ley de conservación de flujo).

La cantidad de informes entonces será la suma de los valores de la función de flujo en las aristas incidentes a t, ya que será la totalidad de análisis que se realizaron. Por lo tanto el valor de flujo máximo será la máxima cantidad de informes sobre los materiales que s

NOTA

Esto asegura que funcione?

posible al tener de los laboratorios que

El grafo es conexo, porque con capacidades enteras e implementado con lista de adyacencia. Usaré un algoritmo de flujo máximo para calcularlo (dependiendo de la complejidad FF o FFEK) ⊛

int algoritmo resolucion problema(int b, int m, vector<lista<int>> analizable){

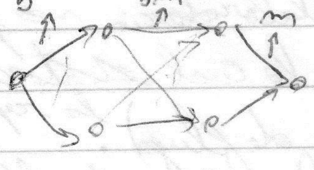
~~Grafo G = CrearRed~~

Red R = CrearRed(b, m, analizable); $O(mb)$

return flujomax(R); $O(m^2 b)$

Complejidad: En el peor de los casos, c/ laboratorio estará capacitado para analizar c/ material, con lo cual tendré

$b+m+2$ nodos (laboratorios, materiales, s, t)
$b+b*m+m$ aristas



Crear el grafo cuesta $O(\text{nodos} + \text{aristas})$ porque y puedo asignarle las capacidades a c/ arista en el proceso

Con lo cual crear la red toma

$O(b+m+2+b+b*m+m)$ para

$\Rightarrow O(mb)$

Como b y m enteros positivos

$b \leq mb$
$m < mb$

ORD

3

FECHA

A la hora de calcular el flujo máximo la complejidad será dado que se cumple ⊛

$O(\min(\text{aristas} * \text{valor max flujo}, \text{nodos} * \text{aristas}^2))$

En el peor de los casos el valor máximo del flujo será $5m$ ⇒ es el caso en que todos los materiales fueran analizados 5 veces

Entonces calculo $O(\min(\text{aristas} * 5m, \text{nodos} * \text{aristas}^2))$

$\text{aristas} * 5m \leq (b + bm + m) 5m = 5mb + 5m^2 b + 5m^2$

$O(\text{aristas} * 5m) = m^2 b$

$\text{nodos} * \text{aristas}^2 = (b+m+2)(b+bm+m)(b+bm+m)$

$= (b^2 + b^2 m + bm + bm + bm^2 + m^2 + 2b + 2bm + 2m)(b+bm+$

$= (b^2 + b^2 m + bm^2 + m^2 + 4bm + 2b + 2m)(b+bm+m)$

$= (b^3 + b^3 m + b^2 m + b^3 m + b^3 m^2 + b^2 m^2 + b^2 m^2 + b^2 m^3 + bm^3 + m^2 b + bm^3$
$+ m^3 + 4b^2 m + 4b^2 m^2 + 4bm^2 + 2b^2 + 2b^2 m + 2bm + 2mb + 2bm^2$
$+ 2m^2)$ Excesivo. $O(b+bm+m) = O(bm)$

$\Rightarrow O((b+bm+m)^2) = O(b^2 m^2)$

aplicando ⊛ ⇒ $O(\text{aristas}^2 * \text{nodos}) =$

$= O(b^3 m^2 + b^2 m^3)$

entonces $\min(O(m^2 b), O(m^2 b^3 + m^3 b^2)) = O(m^2 b)$

⇒ usaré FF y la complejidad total del algoritmo es $O(m^2 b)$

NOTA FFEK es un caso particular de FF y tiene también

ORD (4) 7/14

HOJA N°

FECHA

4) $\Pi_1 \in P \Rightarrow \Pi_2 \in P$

Si existe una reducción polinomial de Π_2 en Π_1 Entonces para toda instancia de Π_2 si la transformo en una de Π_1 en tiempo polinomial ~~y resuelto Π_1~~ y luego la resuelvo (también en tiempo polinomial ya que $\Pi_1 \in P$) resulta que $\Pi_2 \in P$

Busco $f: \Pi_2 \longrightarrow \Pi_1$

~~Propongo $f(G) = (H, k)$~~

$f(G) = (G, 2)$ $O(n+m)$

f es polinomial ya que lo único que tengo que hacer es copiar el grafo y agregar un 2 que es $O(1)$ Asumo representación del grafo con lista de adyacencia con lo que copiarlo cuesta $O(n+m)$

Ahora qvq

$G \in Y_{\Pi_2} \iff f(G) \in Y_{\Pi_1}$

$\Leftarrow)$ $f(G) \in Y_{\Pi_1} \Rightarrow G \in Y_{\Pi_2}$

$\Rightarrow$ G tiene un ~~arg~~ árbol generador en el cual todos los vértices tienen a lo sumo 2 vecinos

Por ser árbol para una vez? por cada nodo de G

NOTA

QRD

5

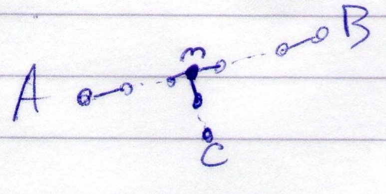
HOJA N°

y no posee ciclos. Al tener c/ nodo grado ≤ 2
sólo posee a lo sumo dos nodos con grado 1 (y el resto con todos
de grado 2 por ser un árbol).

Supongo que posee más de dos nodos con grado 1

Sean A B y C esos nodos. Como están en un árbol
generador existe camino entre c/u de ellos ($A \neq B$, $B \neq C$, $C \neq A$)

Sea P_{AB} el camino entre A y B que los tiene como extremos.
Todos los nodos internos tienen grado 2 necesariamente
Sea P_{AC} camino entre A y C que los tiene como extremos
Como A tiene grado 1 entonces tiene que haber al menos
un nodo perteneciente a P_{AB} (distinto de A y de B ya que tienen
grado 1) que pertenezca a P_{AC} tal que ese nodo tenga un
2 vecinos que pertenezcan a P_{AB} y uno que no (el cual pertenece a
P_{AC})



Si eso no sucediera entonces
$C \in P_{AB} \Rightarrow$ abs pues $C \neq A$, $C \neq B$
y grado$(C) = 1$

Pero entonces ese nodo tiene grado $> 2 \Rightarrow$ abs! pues
c/ nodo tiene grado ≤ 2

$\Rightarrow$ el árbol tiene a lo sumo dos nodos v_1, v_2 con grado 1 y el resto con
grado 2, como existe un camino entre v_1 y v_2, todos
los demás nodos estarán allí ya que es un árbol generador $\Rightarrow$
es conexo y pasa por todos los nodos)

En este punto lo que querés probar es que G tiene

$\Rightarrow)$ $G \in Y_{\Pi_2} \Rightarrow f(G) \in Y_{\Pi_1}$

G tiene camino hamiltoniano $\Rightarrow$ pasa una vez por c/ nodo, luego no tiene ciclos (por ser camino) y el grado de cada nodo es ≤ 2 (ya que si no, no podría pasar por todos los nodos una sola vez al no haber ciclos)

$\Rightarrow$ tiene un árbol generador cuyos vértices tienen grado a lo sumo k. ¿por qué? ¿cuál será?

Por lo tanto como existe una reducción polinomial de Π_2 en instancias de Π_2 a instancias de Π_1 ?

Falta verificar que f transforma adecuadamente instancias de un problema en otro

DPD

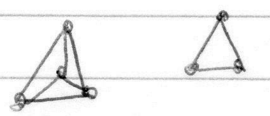
6

HOJA Nº

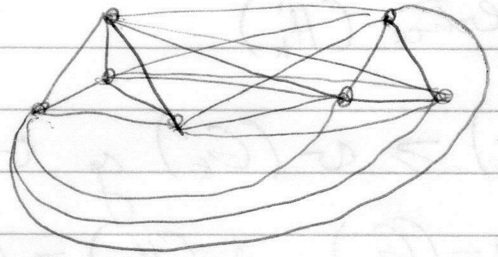
FECHA

5) Grafo junta: tomo 2 grafos y uno c/vértice de 1 con ~~todos~~ los del otro

Ej K_4 C_3



$K_4 + C_3$



a) $\omega(G+H) = \omega(G) + \omega(H)$

Sean G_K y H_K subgrafos completos máximos de G y H respectivamente

En el grafo junta, cada vértice de G_K estará conectado con cada vértice de H_K, y como los vértices de H_K y G_K están conectados entre sí (por ser completos) entonces $G_K + H_K$ será un subgrafo completo en $G+H$.

Supongo que no es maximal, es decir existe otro subgrafo completo maximal en $G+H$. Ese subgrafo necesariamente ~~está~~ está compuesto por un subgrafo completo de G y uno de H porque se realizó la junta y al ser grafos ambos tenían al menos un nodo, con lo que existiría un grafo para cada subgrafo completo, ~~se~~ al menos un nodo se conecta con c/u de sus vértices.

Entonces, el maximal es la junta de un subgrafo completo de G y uno de H, lo llamo G'_K y H'_K. Como $G'_K + H'_K$ es maximal

NOTA

y $G_k + H_k$ no, entonces vértices $(G_k + H_k) <$ vértices $(G_k' + H_k')$
Como la cantidad de vértices son enteros positivos

y vértices $(G + H) =$ vértices $(G) +$ vértices (H)

$$\text{vértices}(G_k) + \text{vértices}(H_k) < \text{vértices}(G_k') + \text{vértices}(H_k')$$

necesariamente

ó vértices $(G_k) <$ vértices (G_k')
ó vértices $(H_k) <$ vértices (H_k')

ya que si no se cumple ninguna de las dos $v(G_k) \geq v(G_k')$ y $v(H_k) \geq v(H_k')$

$$\Rightarrow v(G_k) + v(H_k) \geq v(G_k') + v(H_k')$$

Pero entonces

si $v(G_k) < v(G_k')$ G_k no sería subgrafo completo <u>maximal</u> de G

si $v(H_k) < v(H_k')$ H_k no sería subgrafo completo <u>maximal</u> de G

maximal $\rightarrow$ maximo

QRP (7)

HOJA N°

FECHA

b) $\alpha(G+H) = \max\{\alpha(G), \alpha(H)\}$

I) El conj independiente máximo de G sigue siendo CI en G+H ya que todas las aristas originales de G inciden en a lo sumo 1 nodo del CI, ninguna arista original de H incide con algún nodo del CI y como las aristas agregadas conectan nodos de G con nodos de H ninguna va a incidir en más de un nodo del CI.

Lo mismo aplica para el conjunto independiente máximo en H.

$\Rightarrow$ Ambos son CI válidos en G+H

~~Ahora qvq son maxim~~

Ahora qvq $\alpha(G+H) = \max\{\alpha(G), \alpha(H)\}$

~~Lo llamo I al CI tal que $|I| = \max\{\alpha(G), \alpha(H)\}$ qvq I es conj indep máximo en G+H, siendo I CI de G o de H~~

Sea X un CI máx de G+H, qvq todos los nodos de ese conjunto pertenecen a G o a H
Supongo que no, es decir hay nodos de G y H en el CI pero por ser grafo junta todos los vértices de G se conectan con los de H, en particular en los nodos pertenecientes al CI, con lo cual no sería un CI válido ya que hay aristas que están siendo incididas por más de un nodo abs!

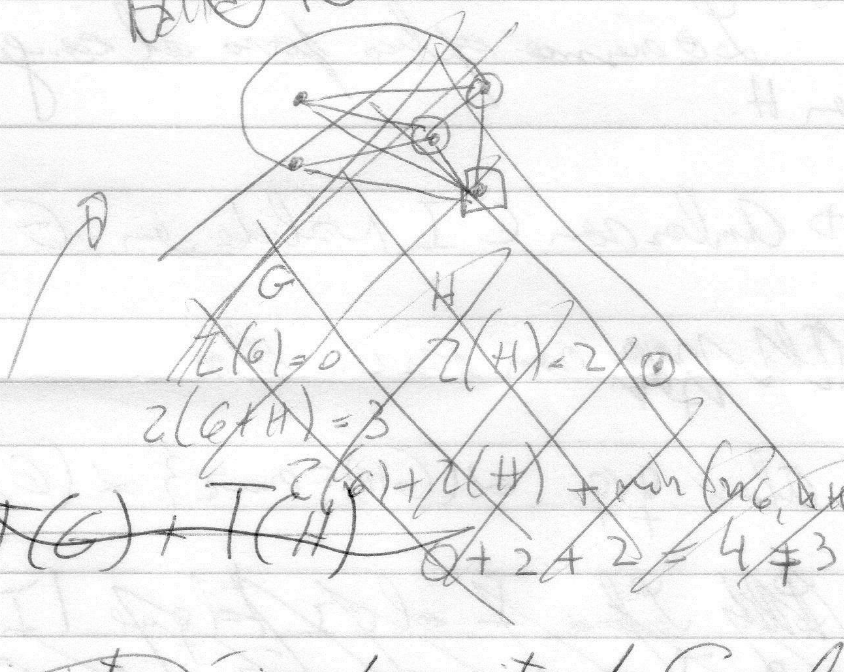
$\Rightarrow$ X es CI máx de G o CI máx de H. Como es máximo,

entonces vale que $|X| = \max\{|CI_{max} \text{ de } G|, |CI_{max} \text{ de } H|\}$

con lo cual $\alpha(G+H) = \max\{\alpha(G), \alpha(H)\}$

~~c) Si G y H son estrellas elegir el del medio~~

~~Falla por ejemplo~~



c) ~~Por propiedad~~

~~$\tau(G+H) = \tau(G) + \tau(H)$~~

~~utilizando el recubrimiento mínimo de aristas de G cubre todas las aristas de G~~

c) $\tau(G+H) = \tau(G) + \tau(H) + \min\{N_G, N_H\}$

donde N_G y N_H son el cardinal del conjunto de nodos tales que no pertenecen al cubrimiento de aristas por vértice mínimo de G y de H respectivamente

Lo que hago para formar el cubrimiento es usar el cubrimiento de G para cubrir las aristas originales, el de H para esas también

(RD) (8)

HOJA N°

FECHA

y luego ~~de ellos~~ para cubrir las aristas que no son alcanzadas por ningún nodo de ambos cubrimientos (y fueron generadas por la junta), tomo los nodos del grafo tal que tenga menos cantidad de nodos no ~~repetidos~~ → pertenecientes a su recubrimiento mínimo.

Es un recubrimiento válido porque así llego a y arista de la junta y a las aristas originales.

Es mínimo porque si no lo fuera existiría recubrimiento de aristas originales de G y H con menor cantidad de nodos, absurdo

No demuestra

Faltan d y e)